# Лабораторна робота №12

**Тема: Оптимальні шляхи на графах**

**Мета роботи**: придбання практичних навичок в знаходженні ейлерових і гамільтонових циклів в неорієнтованих графах, рішення задач «китайського листоноші» і комівояжера

**1. Теоретична довідка.**

**Ейлерові цикли**

Ейлерів цикл – цикл, що містить всі ребра вихідного графа (кожне ребро використовується рівно 1 раз).

Ейлерів граф – зв'язний граф, що містить Ейлерів цикл.

Наприклад:

G1:

G2:

2рази

**Теорема Ейлера або критерій існування в графі**

**ейлеревого циклу**

**Зв'язний граф G є ейлеровим тоді і тільки тоді,**

**коли ступені всіх його вершин парні**

**Слідство №1**. Для зв'язкового графа G множину ребер можна розбити на прості цикли, якщо граф Ейлером.

**Слідство №2.** Для того щоб зв'язний граф G покривався єдиним ейлеревим ланцюгом, необхідно і достатньо, щоб він містив рівно 2 вершини з непарної ступенем. Тоді ланцюг починається в одній з цих вершин і закінчується в інший.

**Алгоритм побудови ейлерового циклу або алгоритм Флері**

1. Починаючи з будь-якої вершини v, присвоюємо ребру vu №1. Викреслюємо це ребро зі списку ребер і переходимо до вершини u.

2. Нехай w − вершина, в яку ми прийшли в результаті виконання кроку 1 і k − номер, присвоєний чергового ребру на цьому кроці. Вибираємо довільне ребро інцидентне вершині w, причому міст вибираємо тільки в крайньому випадку, якщо інших можливостей вибору ребра не існує. Надаємо ребру номер k + 1 і викреслюємо його. Процес триває до тих пір, поки всі ребра що викреслені.

Наприклад:

9

V6

8

7

6

V5

5

4

V4

3

V3

2

V2

1

V1

Ейлерів ланцюг – ланцюг з кінцевими вершинами (a, b), що починається в вершині a, що закінчується в вершині b і містить кожне ребро вихідного графа рівно 1 раз.

**Гамільтона цикли**

Гамільтонів цикл - простий цикл, що містить кожну вершину графа.

Гамільтонів граф - граф, що містить Гамільтонів цикл..

**Достатні умови існування Гамільтона**

**циклу в графі**

**Теорема Дирака**

Якщо число вершин графа p ≥ 3 і для будь-якої вершини виконується умова ∀ vi, i = ; deg vi ≥ , то граф G – гамільтонів

**Теорема Оре**

Якщо число вершин графа p ≥ 3 і для будь-яких двох несуміжних вершин u і v виконується нерівність: deg u + deg v ≥ p, то граф G – гамільтонів

Наприклад:

v5

v8

v4

v7

v6

v3

v1

v2

**3.** Завдання до лабораторної роботи

Вихідні графи G1: (13, {5, 6})

G2: (7,{3,4})

1. Визначити, чи є граф G1 ейлеревим.

Якщо граф G1 - Ейлером, то:

•               побудувати Ейлером цикл за алгоритмом Флері;

•               вирішити задачу «китайського листоноші», видаливши мінімальне число ребер, робить його не ейлеревим (в якості ваг ребер взяти 1).

Якщо G1 не є ейлеревим, то:

•               побудувати ейлереві ланцюга в графі G1;

•               **додати мінімальне число ребер, які роблять його ейлеревим і знайти Ейлером цикл за алгоритмом Флері**;

•               **вирішити задачу «китайського листоноші» (в якості ваг ребер взяти 1).**

•               **побудувати подвійний ейлерів маршрут за алгоритмом Террі.**

2.               Визначити, чи є граф G2 гамільтоновим.

Якщо граф - гамільтонів, то:

•               **побудувати гамільтонів цикл, використовуючи дерево повного перебору;**

•               **побудувати гамільтона цикли, використовуючи алгоритм Робертса-Флореса;**

•

Якщо граф не є гамільтоновим, то:

•               вирішити задачу комівояжера (в якості ваг ребер взяти 1);

•               додати мінімальне число ребер, які роблять його гамільтоновим; побудувати гамільтонів цикл, використовуючи дерево повного перебору і алгоритм Робертса-Флореса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** - 1 | **Ґ** - 5 | **Ж** - 9 | **Ї** -13 | **М** -17 | **Р** -21 | **Ф** -25 | **Ш** -29 | **Я** -33 |
| **Б** - 2 | **Д** - 6 | **З** -10 | **Й** -14 | **Н** -18 | **С** -22 | **Х** -26 | **Щ** -30 |  |
| **В** - 3 | **Е** - 7 | **И** -11 | **К** -15 | **О** -19 | **Т** -23 | **Ц** -27 | **Ь** -31 |  |
| **Г** - 4 | **Є** - 8 | **І** -12 | **Л** -16 | **П** -20 | **У**  -24 | **Ч**  -28 | **Ю** -32 |  |

**4. Алгоритм генерації варіанту графа**

**GV ( p,X ) : A[1:p,1:p],** де

**p** - кількість вершин в графі;

**X** - параметр генерації (множина цілих);

**А** - матриця суміжності неорієнтованого графа.

***S*** *=* <прізвище> <ім'я> <по батькові>

***n (c)*** - функція – номер букви в алфавіті (1..32)

1. Викреслити з **S** все повторні входження букв.

2. Побудувати ***Y = || yi j ||, i,j =1..p,***

***yij = | n (Si) - n (Sj) |.***

3. Побудувати ***А = || аij ||, i,j =1..p*,**

**аij=**

4. Для кожної ізольованою (домінуючою) вершини додати (видалити) одне ребро. Додається (видаляється) ребро пов'язує поточну вершину з наступною (за номером). Для останньої вершини наступна - перша.

Приклад реалізації GV ( 7, (2,3) ).

Рядок S = С И Д О Р ~~О~~ В ~~И~~ ~~В~~ А Н П Е Т ~~Р~~ ~~О~~ ~~В~~ ~~И~~ Ч.

Після викреслювання повторних входжень букв

S = С И Д О Р В А Н П Е Т Ч.

Таблиця для функції n (S)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** - 1 | | | | **Д** - 5 | | | | **З** - 9 | | | **Л** -13 | | | | **П** -17 | | | | **У** -21 | | | **Ч** -25 | | | **Ь** -29 | |
| **Б** - 2 | | | | **Е** - 6 | | | | **И** -10 | | | **М** -14 | | | | **Р** -18 | | | | **Ф** -22 | | | **Ш** -26 | | | **Э** -30 | |
| **В** - 3 | | | | **Ё** - 7 | | | | **Й** -11 | | | **Н** -15 | | | | **С** -19 | | | | **Х** -23 | | | **Щ** -27 | | | **Ю** -31 | |
| **Г** - 4 | | | | **Ж** - 8 | | | | **К** -12 | | | **О** -16 | | | | **Т** -20 | | | | **Ц**  -24 | | | **Ы**  -28 | | | **Я** -32 | |
| S | С | | | И | | Д | | | О | | | Р | | В | | А | | | Н | | П | | | Е | | Т | Ч | |
| N(si) | 19 | | | 10 | | 5 | | | 16 | | | 18 | | 3 | | 1 | | | 15 | | 17 | | | 6 | | 20 | 25 | |
| Y = | |  | | | 19 | | | 10 | | 5 | | | 16 | | 18 | | 3 | | | 1 | | |
| 19 | | | 0 | | | 9 | | 14 | | | 3 | | 1 | | 16 | | | 18 | | |
| 10 | | | 9 | | | 0 | | 5 | | | 6 | | 8 | | 7 | | | 9 | | |
| 5 | | | 14 | | | 5 | | 0 | | | 11 | | 13 | | 2 | | | 4 | | |
| 16 | | | 3 | | | 6 | | 11 | | | 0 | | 2 | | 13 | | | 15 | | |
| 18 | | | 1 | | | 8 | | 13 | | | 2 | | 0 | | 15 | | | 17 | | |
| 3 | | | 16 | | | 7 | | 2 | | | 13 | | 15 | | 0 | | | 2 | | |
| 1 | | | 18 | | | 9 | | 4 | | | 15 | | 17 | | 2 | | | 0 | | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**G1 :**

**6. Зміст звіту**.

1. Титульний лист.

2. Назва та мета роботи.

3. Завдання.

4. Результати виконання завдання.

5. Висновки по роботі.